Examen VWO

2022

tijdvak 1
vrijdag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

Inverse van $\ln(x)$

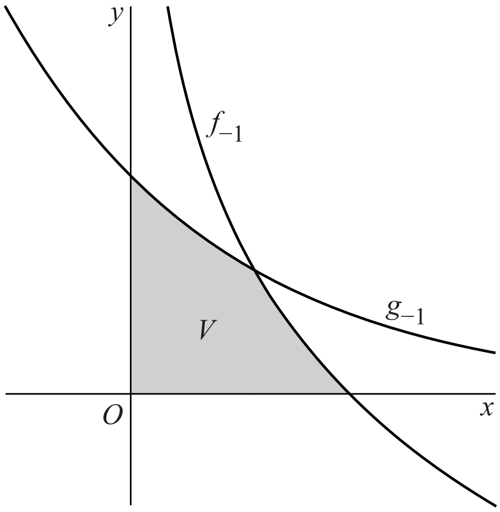
De functies f_p en g_p zijn gegeven door $f_p(x) = p\ln(x)$ en $g_p(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{p}}$, voor $p \neq 0$.
De functies f_p en g_p zijn elkaars inverse.

3p **1** Bewijs dit.

Neem $p = -1$. V is het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f_{-1} en g_{-1}, de x-as en de y-as. Zie figuur 1.

5p **2** Bereken de oppervlakte van V. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

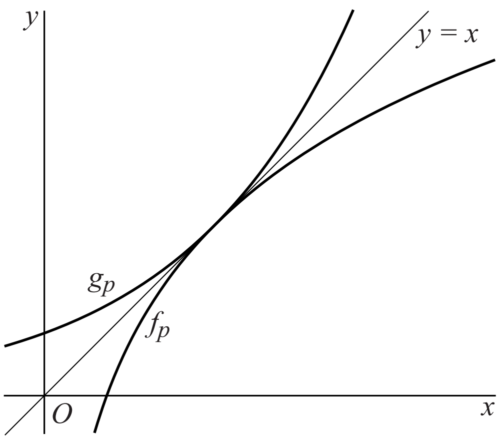
figuur 1



Er bestaat een waarde van p waarbij de lijn $y = x$ de gemeenschappelijke raaklijn is van de grafieken van f_p en g_p.
Deze situatie is in figuur 2 weergegeven.

4p **3** Bereken exact de waarde van p waarvoor de lijn $y = x$ de gemeenschappelijke raaklijn is van de grafieken van f_p en g_p.

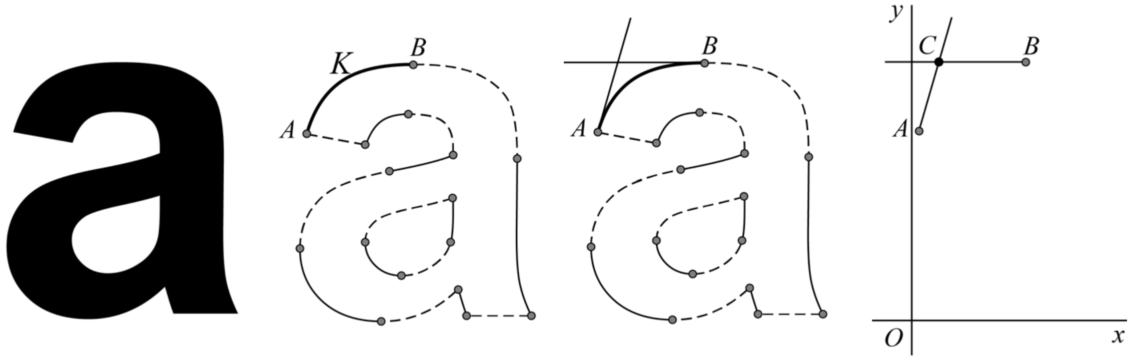
figuur 2



Letter op het computerbeeldscherm

De rand van een letter op een computerbeeldscherm is een aaneenschakeling van meerdere krommen. Zo is de rand van de (uitvergrote) letter ‘a’ in figuur 1 gemaakt met behulp van zestien krommen, die je in figuur 2 ziet.

figuur 1 **figuur 2** **figuur 3** **figuur 4**



Elk van de zestien krommen kan met een formule worden beschreven. Computers hebben die formules nodig om de letters op het scherm te kunnen tekenen. Als voorbeeld bekijken we de kromme K tussen A en B, die in figuur 2 dikker is getekend.

We gaan ervan uit dat er vier gegevens bekend zijn:

- de coördinaten van A;
- de coördinaten van B;
- de richting van de raaklijn in A aan de kromme;
- de richting van de raaklijn in B aan de kromme.

Zie figuur 3. De vraag is nu hoe je uit deze vier gegevens een formule voor de kromme K maakt.

In figuur 4 zie je de punten A en B en de twee raaklijnen, geplaatst in een assenstelsel. Gegeven is dat A de coördinaten $\left(\frac{1}{15}, \frac{4}{3}\right)$ heeft, B de coördinaten $\left(1, \frac{19}{10}\right)$, dat de raaklijn in B horizontaal is en dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A gelijk is aan 4. Het punt C is het snijpunt van de twee raaklijnen en speelt een belangrijke rol bij de constructie van de kromme K.

3p **4** Bereken exact de x-coördinaat van C.

Om de kromme K te kunnen construeren, worden er, behalve de drie vaste punten A, B en C, drie bewegende punten P, Q en R gebruikt. Deze bewegen als volgt:

- Punt P beweegt voor $0 \le t \le 1$ met een constante snelheid over lijnstuk AC van A naar C. Er geldt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AC}$
- Punt Q beweegt voor $0 \le t \le 1$ met een constante snelheid over lijnstuk CB van C naar B. Er geldt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CB}$
- Terwijl punten P en Q bewegen, schuift punt R op het bewegende lijnstuk PQ van P naar Q. Er geldt: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$

Het punt R doorloopt van $t = 0$ tot $t = 1$ een kromme van A naar B. Deze kromme wordt de **Bézierkromme** (van A, B en C) genoemd, en dat is kromme K uit figuur 2.

Figuur 4 is op de uitwerkbijlage uitvergroot weergegeven.

3p **5** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het punt R van de Bézierkromme dat hoort bij $t = 0,25$. Licht je werkwijze toe.

$\overrightarrow{OR}$ is uit te drukken in t, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{OC}$. Er geldt voor elke waarde van t:

$$\overrightarrow{OR} = (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OA} + t^2 \cdot \overrightarrow{OB} + 2t(1-t) \cdot \overrightarrow{OC}$$

5p **6** Bewijs dit.

In de rest van deze opgave kijken we naar een ander voorbeeld. Het gaat niet meer om de letter ‘a’.
De coördinaten van A, B en C zijn nu als volgt: $A(0, 4)$, $B(2, 2)$ en $C(3, 0)$. Ook nu is C het snijpunt van de raaklijnen in A en B.

De Bézierkromme van A, B en C is, volgens de formule voor $\overrightarrow{OR}$, te beschrijven met behulp van vectoren. Het is echter ook mogelijk deze Bézierkromme met bewegingsvergelijkingen te beschrijven.

We bekijken het punt L met de volgende bewegingsvergelijkingen:

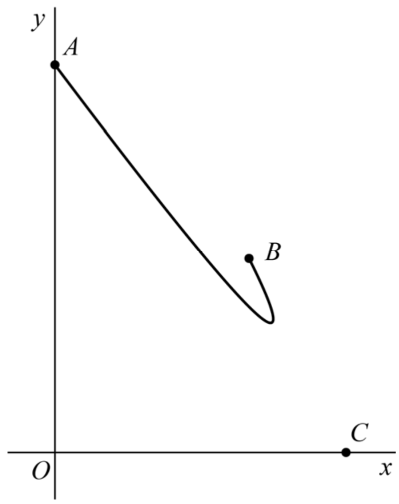
$$\begin{cases} x(t) = -4t^2 + 6t \\ y(t) = 6t^2 - 8t + 4 \end{cases} \quad \text{met } 0 \le t \le 1$$

De baan van L is weergegeven in figuur 5.

Er geldt: de baan van L is de Bézierkromme die hoort bij de punten A, B en C.

3p **7** Bewijs dit met behulp van de formule voor $\overrightarrow{OR}$.

figuur 5



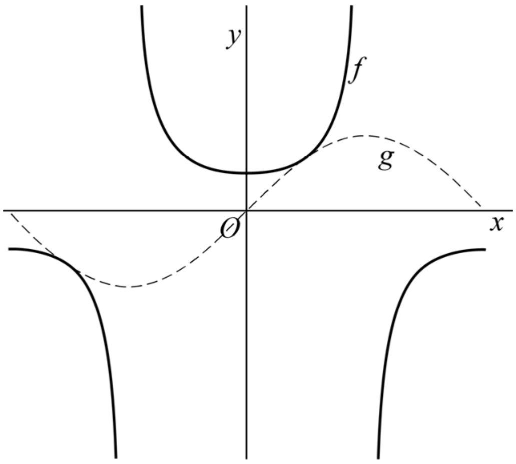
Gebroken sinusfunctie

De functie f is voor $-\pi < x < \pi$ gegeven door:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$$

De functie g is gegeven door $g(x) = \sin(x)$.
In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven.

figuur



8p **8** Bewijs dat de grafieken van f en g elkaar in twee punten raken.

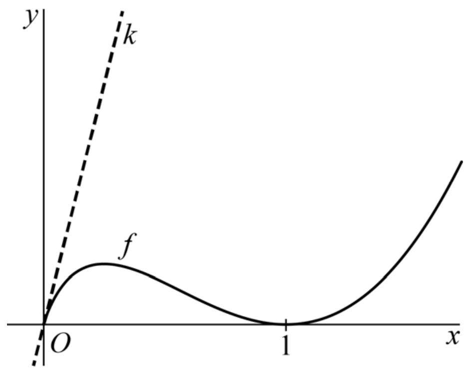
Raaklijn verschuiven

De functie f is gegeven door
$f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$ met $x \geq 0$.

In de figuur is de grafiek van f met haar raaklijn k in de oorsprong weergegeven.

De grafiek van f heeft de punten $(0, 0)$ en $(1, 0)$ gemeenschappelijk met de x-as.

figuur



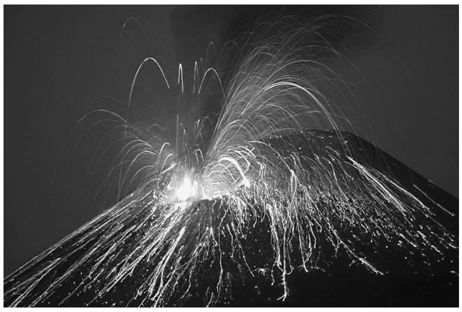
4p **9** Bewijs dat er geen andere gemeenschappelijke punten van de grafiek van f met de x-as zijn.

4p **10** Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

Er is een waarde van a, met $a \neq 0$, waarbij een verschuiving van de raaklijn k over de vector $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ weer een raaklijn aan de grafiek van f geeft.

7p **11** Bereken exact deze waarde van a.

Vulkaan

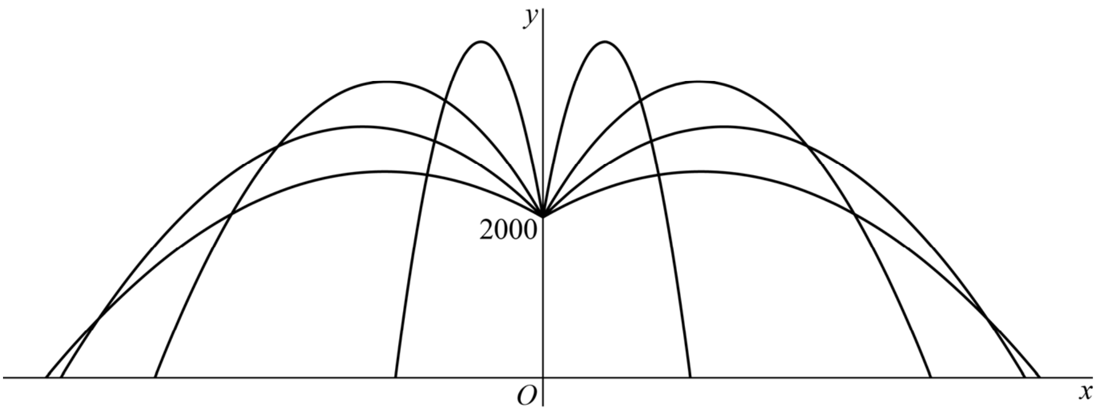


Een vulkaan kan op verschillende manieren tot uitbarsting komen. Bij een zogenoemde plinische uitbarsting wordt de druk binnen de vulkaan steeds groter totdat de vulkaan met groot geweld tot uitbarsting komt. Bij de uitbarsting worden brokken gesmolten steen weggeslingerd die lavabommen worden genoemd.

In een model van de baan van een lavabom wordt ervan uitgegaan dat op het moment van de uitbarsting alle lavabommen een snelheid hebben van 210 meter per seconde. Een tweede uitgangspunt is dat elke lavabom een parabolische baan beschrijft. De hoogte van de vulkaan ten opzichte van de grond is 2000 meter.

In figuur 1 zie je de banen van een aantal lavabommen die in het vlak door de x-as en de y-as bewegen.

figuur 1



De bewegingsvergelijkingen van een lavabom hangen af van de richting waarin de lavabom tijdens de uitbarsting wordt weggeslingerd. In het model worden de volgende bewegingsvergelijkingen als uitgangspunt genomen:

$$\begin{cases} x(t) = 210\cos(\alpha)\cdot t \\ y(t) = 2000 + 210\sin(\alpha)\cdot t - 4{,}9t^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Hierbij is α de hoek die de baan van de lavabom op het moment van wegslingeren maakt met een horizontale lijn, waarbij $0 < \alpha < \pi$.
Verder is t de tijd in seconden (waarbij $t = 0$ het moment van wegslingeren is) en zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meters.

Uitgaande van stelsel 1 kan de y-coördinaat van de baan worden uitgedrukt in x en α. Er geldt (voor $\alpha \neq \frac{1}{2}\pi$):

$$y = 2000 + \tan(\alpha) \cdot x - \frac{1}{9000\cos^2(\alpha)} \cdot x^2 \qquad (2)$$

3p **12** Bewijs dit.

Een lavabom wordt onder een hoek $\alpha = 1$ (radiaal) weggeslingerd. Deze lavabom komt op een bepaalde afstand van de vulkaan op de grond. Voor dit punt geldt $y = 0$.

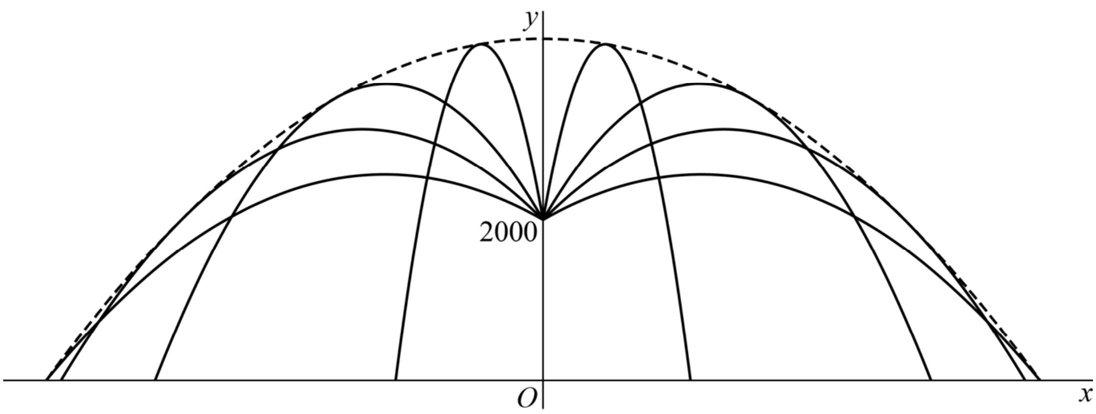
3p **13** Bereken deze afstand. Geef je eindantwoord in honderden meters nauwkeurig.

Formule 2 kan worden herleid tot:

$$y = -\frac{1 + \tan^2(\alpha)}{9000} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + 2000 \qquad (3)$$

In figuur 2 is bij de parabolische banen van een aantal lavabommen een gestippelde kromme getekend. Deze kromme stelt de uiterste grens voor van het gebied dat door deze lavabommen kan worden bereikt.

figuur 2



De formule van de gestippelde kromme is:

$$y = -\frac{1}{9000} \cdot x^2 + 4250 \qquad (4)$$

Alle banen van de lavabommen hebben precies één punt gemeenschappelijk met de gestippelde kromme en raken dus aan deze kromme.

4p **14** Bewijs dat alle banen van de lavabommen raken aan de gestippelde kromme.

Scheve asymptoot

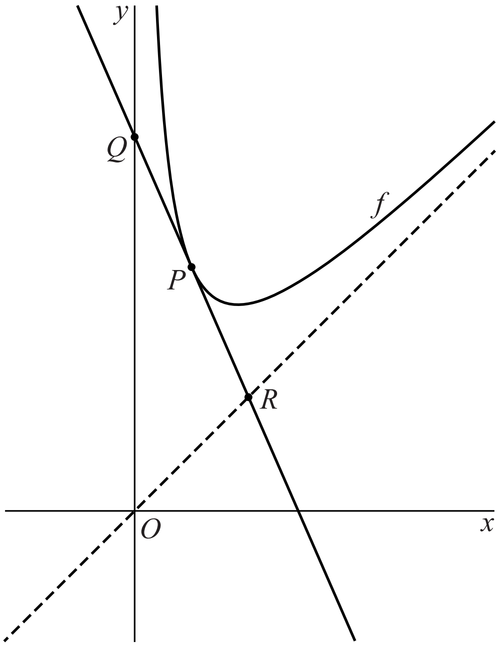
De functie f is gegeven door $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

De grafiek van f heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x = 0$ en een scheve asymptoot.

In onderstaande figuur is voor $x > 0$ de grafiek van f weergegeven.

De scheve asymptoot is gestippeld weergegeven.

figuur



Op de grafiek van f ligt een willekeurig punt $P(p,\ p + \frac{2}{p})$.

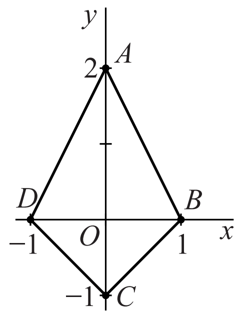
De raaklijn aan de grafiek van f in P snijdt de verticale asymptoot in punt Q en de scheve asymptoot in punt R. Zie de figuur.

8p **15** Bewijs dat P het midden is van lijnstuk QR.

Vlieger

Gegeven zijn voor $a > 0$ de punten $A(0, a)$, $B(1, 0)$, $C(0, -1)$ en $D(-1, 0)$.
Vierhoek $ABCD$ is een vlieger.
In figuur 1 is de vlieger getekend voor $a = 2$.

figuur 1

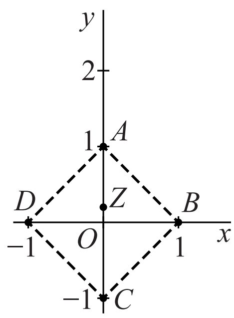


De middelloodlijn van een lijnstuk gaat door het midden van dat lijnstuk en staat loodrecht op dat lijnstuk.

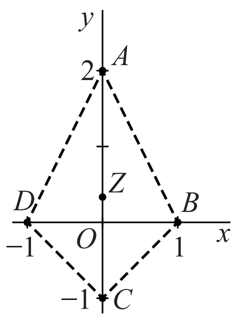
Voor $a = 2$ gaat de middelloodlijn van lijnstuk AB niet door D.

5p **16** Bereken exact voor welke waarde van a de middelloodlijn van lijnstuk AB wél door D gaat.

figuur 2



figuur 3



In de hoekpunten van de vlieger bevinden zich puntmassa's:
- in punt A met gewicht 2;
- in zowel B als D met gewicht 1;
- in punt C met gewicht a.

In figuur 2 zijn de vlieger, de puntmassa's en het zwaartepunt Z van de puntmassa's getekend voor het geval $a = 1$.
In figuur 3 zijn de vlieger, de puntmassa's en het zwaartepunt Z getekend voor het geval $a = 2$.

Wanneer a groter wordt, verschuift het punt $A(0, a)$ over de y-as omhoog en neemt het gewicht in C toe. Ook het zwaartepunt Z van de vier puntmassa's verandert dan van plaats. Wanneer a onbegrensd toeneemt, nadert het zwaartepunt Z tot een vast punt P.

4p **17** Bewijs dat de y-coördinaat van dat punt P gelijk is aan 1.