Examen HAVO

2022

tijdvak 3
vrijdag 8 juli
9.00 - 12.00 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

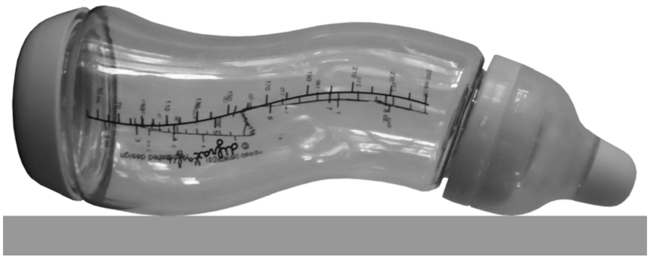
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Zuigflesje

Zuigflesjes voor baby's hebben soms bijzondere vormen. Op de foto is goed de gebogen vorm van zo'n zuigflesje te zien.

foto



In deze opgave bekijken we een model van het vooraanzicht van het doorzichtige deel van het zuigflesje op de foto. In dit model zijn alle maten in cm.

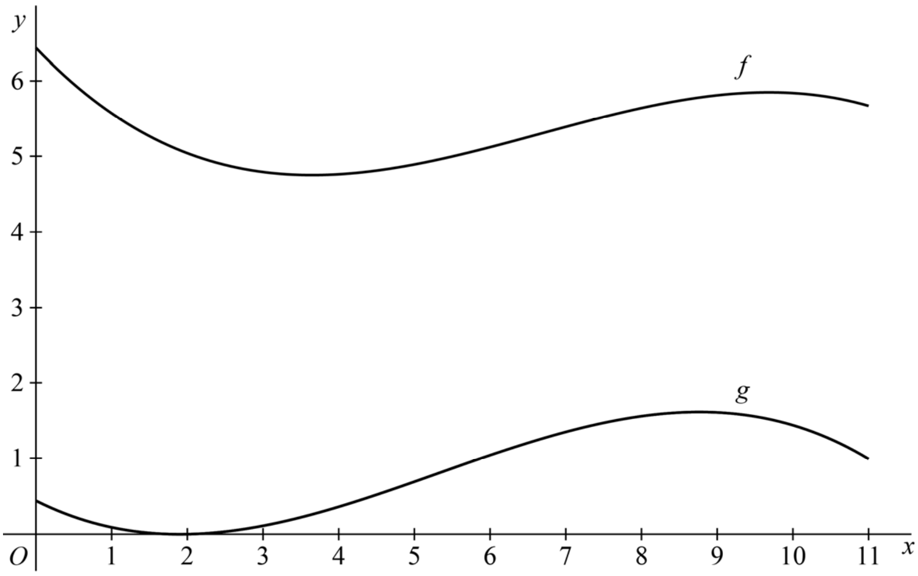
In het model is de bovenrand van het zuigflesje de grafiek van een functie f, en de onderrand van het zuigflesje de grafiek van een functie g. De functies f en g worden voor $0 \leq x \leq 11$ gegeven door:

$$f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}20x^2 - 1{,}06x + 6{,}44$$

$$g(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}16x^2 - 0{,}50x + 0{,}44$$

In figuur 1 zijn de grafieken van f en g getekend.

figuur 1

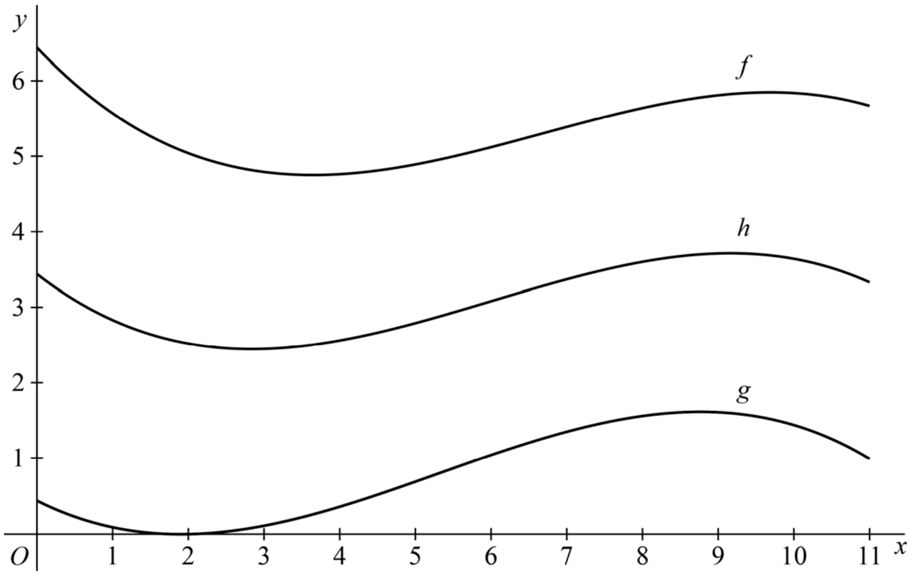


De verticale afstand $d(x) = f(x) - g(x)$ is niet voor elke waarde van x gelijk.

4p **1** Bereken algebraïsch voor welke waarde van x de verticale afstand d het kleinst is.

Op de foto is midden op het zuigflesje een gebogen lijn te zien. Hierop zijn maatstreepjes aangebracht. In het model is deze lijn de grafiek van een functie h.
Zie figuur 2.

figuur 2



Voor elke x is $h(x)$ het gemiddelde van $f(x)$ en $g(x)$.

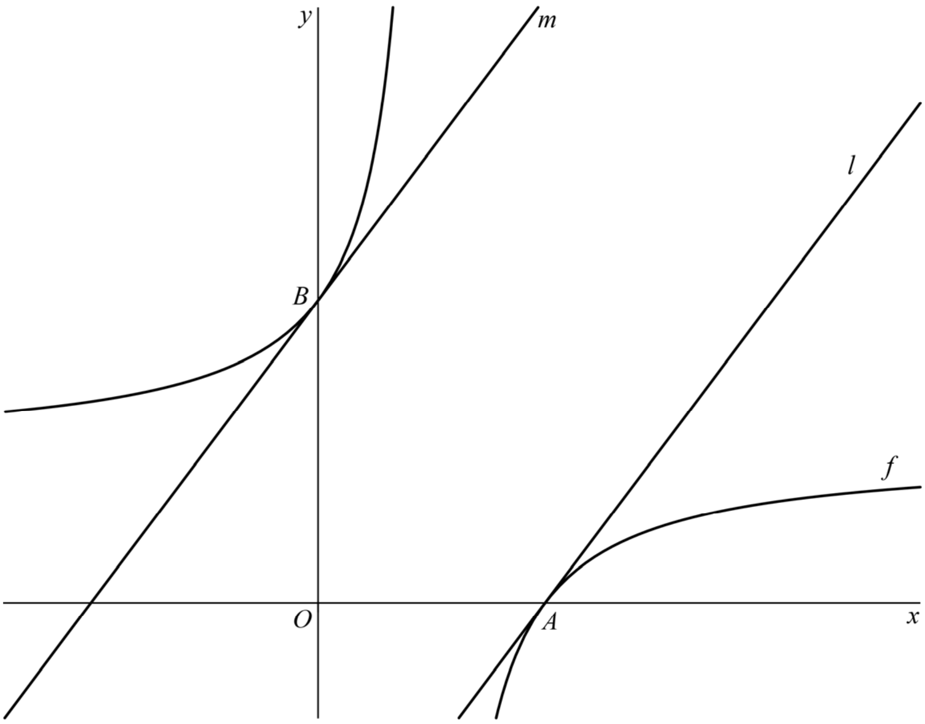
3p **2** Geef een functievoorschrift van h. Schrijf dit functievoorschrift zo eenvoudig mogelijk.

Hyperbool met cirkels

De functie f is gegeven door $f\left(x\right)=\dfrac{-6}{2x-3}+2$.

Lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $A\left(3,0\right)$ en lijn m is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $B\left(0,4\right)$. Zie figuur 1.

figuur 1

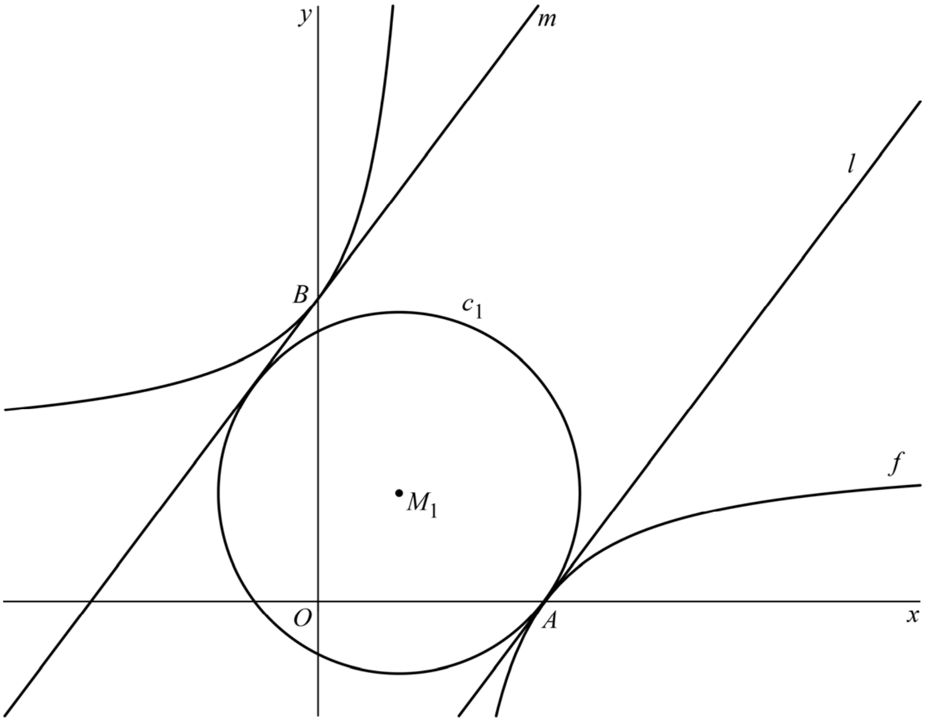


De twee raaklijnen hebben allebei richtingscoëfficiënt $\frac{4}{3}$.

4p **3** Toon dit met behulp van differentiëren aan.

Cirkel c_1 raakt l in A. Bovendien raakt c_1 aan m.
Punt M_1 is het middelpunt van c_1. Zie figuur 2.

figuur 2



De coördinaten van M_1 zijn $\left(\frac{27}{25}, \frac{36}{25}\right)$.

6p **4** Bewijs dit.

M_1 ligt op de lijn k met vergelijking $y = \frac{4}{3}x$.

Cirkel c_2 is gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$.

3p **5** Bewijs dat het middelpunt van c_2 ook op k ligt.

Het rendement van warmtemotoren

In een warmtemotor, bijvoorbeeld de motor van een auto, wordt de totale hoeveelheid energie die in brandstof aanwezig is nooit helemaal omgezet in bewegingsenergie. Het **rendement** van een warmtemotor is het percentage van de totale hoeveelheid energie dat wel wordt omgezet in bewegingsenergie.

Door technische vooruitgang neemt het rendement van warmtemotoren toe. Men gaat ervan uit dat deze ontwikkeling zich de komende jaren blijft voortzetten.

Om deze groei van het rendement in de tijd te onderzoeken, gebruikten de Amerikaan Ausubel en de Italiaan Marchetti de formule

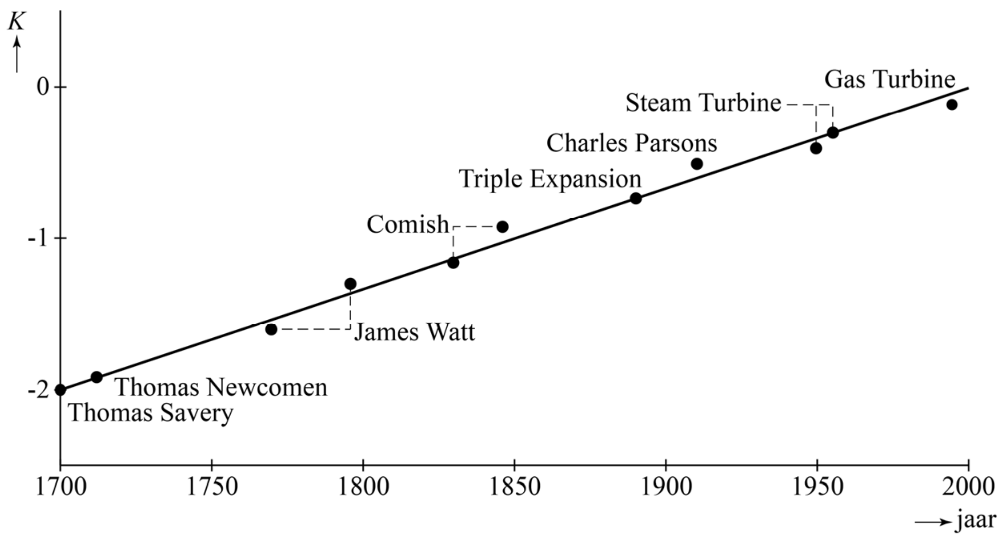
$$K = \log\left(\frac{R}{100-R}\right) \qquad (1)$$

Hierin is R het rendement in procenten.

3p **6** Leg met behulp van formule (1) uit dat een toename van R zorgt voor een toename van K.

In de figuur hieronder, afkomstig uit een artikel van Ausubel en Marchetti, is voor verschillende warmtemotoren (vaak aangeduid met de naam van de uitvinder) K uitgezet tegen het jaartal waarin deze uitgevonden zijn. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



In de figuur is te zien dat de warmtemotor die Charles Parsons aan het begin van de twintigste eeuw ontwikkelde een – voor die tijd – zeer hoog rendement had.

4p **7** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage het rendement van deze warmtemotor in procenten. Geef je eindantwoord als geheel getal.

In de figuur is een lijn weergegeven die de ontwikkeling van het rendement van warmtemotoren benadert. Bij deze lijn hoort de formule

$$K = 0{,}00667t - 2 \qquad (2)$$

Hierin is t het aantal jaren na 1700.

Men gaat ervan uit dat in de toekomst een rendement van 70% haalbaar is.

4p **8** Bereken in welk jaar dit rendement voor het eerst behaald zal worden.

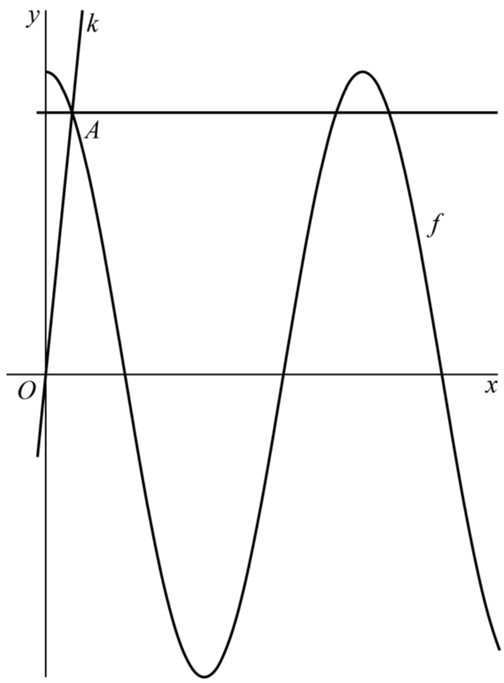
Met behulp van formules (1) en (2) kan R uitgedrukt worden in t.

5p **9** Druk R uit in t.

Cosinus en lijnen

Op het domein $[0, 3]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2\cos(3x)$. Het punt A is het meest links gelegen snijpunt van de grafiek van f en de lijn met vergelijking $y = \sqrt{3}$.
Lijn k gaat door O en A. Zie figuur 1.

figuur 1



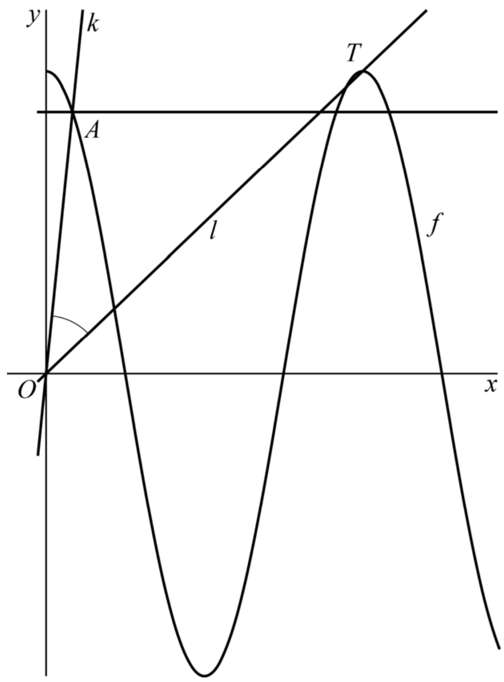
De richtingscoëfficiënt van k is $\dfrac{18\sqrt{3}}{\pi}$.

4p **10** Bewijs dit.

Het punt T is de meest rechts gelegen top van de grafiek van f. Lijn l gaat door O en T. Zie figuur 2.

7p **11** Bereken algebraïsch $\angle AOT$ in graden. Geef je eindantwoord als geheel getal.

figuur 2



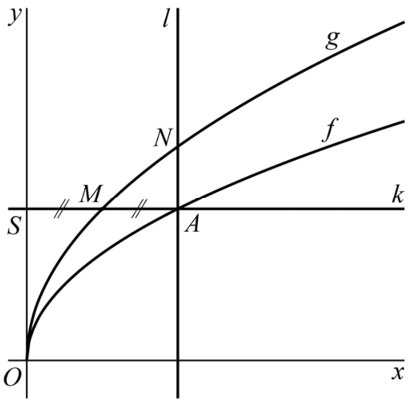
Wortelfunctie

De functie f is gegeven door $f(x)=\sqrt{x}$. Het punt $A(1,1)$ ligt op de grafiek van f.
Lijn k is de horizontale lijn door A. Deze lijn snijdt de y-as in het punt S.

We bekijken nu een functie g met de volgende kenmerken:
- de grafiek van g gaat door het midden M van lijnstuk AS;
- de grafiek van g kan uit de grafiek van f ontstaan door middel van een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as;
- de grafiek van g kan ook uit de grafiek van f ontstaan door middel van een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as.

Lijn l is de verticale lijn door A. Deze lijn snijdt de grafiek van g in het punt N. Zie figuur 1.

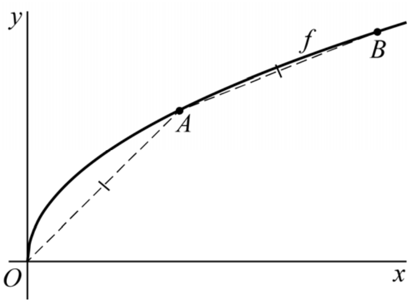
figuur 1



4p **12** Bereken exact de y-coördinaat van N.

Punt $B\left(b,\sqrt{b}\right)$ met $b>0$ ligt op de grafiek van f, zodanig dat $OA=AB$.
Zie figuur 2.

figuur 2



4p **13** Bereken b. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

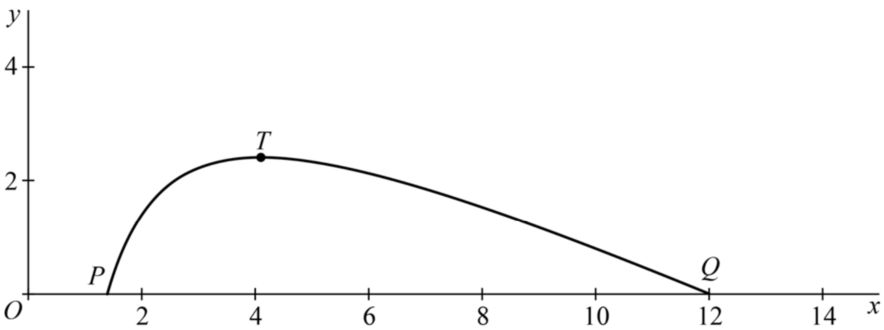
Brug

Op de foto is een boogbrug te zien. De vorm van de onderrand van de boog van de brug wordt benaderd met behulp van een wiskundig model.

foto

In de figuur hieronder is de onderrand van de boog schematisch weergegeven.

figuur



In deze figuur is x de lengte in meters van het wegdek gemeten vanaf het meest linkse punt van de brug en y de hoogte in meters van de onderrand van de boog ten opzichte van het wegdek. We nemen aan dat de onderrand van de boog begint en eindigt op het wegdek.

De onderrand van de boog begint bij $x = 1,4$ in punt P en eindigt bij $x = 12,0$ in punt Q. Het hoogste punt is T bij $x = 4,1$ en $y = 2,4$.

De boog kan benaderd worden met een formule van de vorm

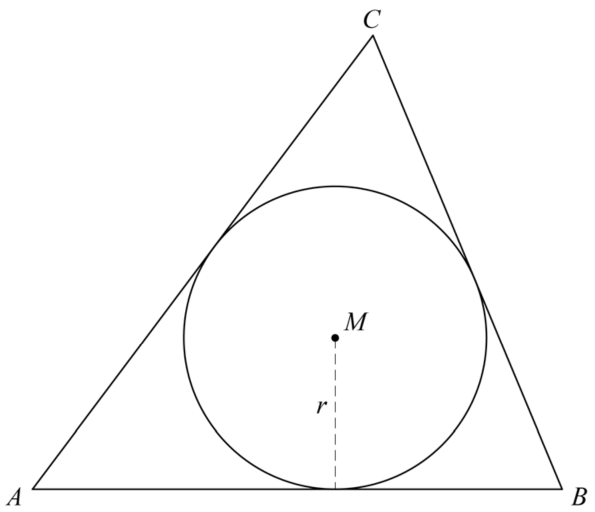
$$y = a\left(x + b + \frac{c}{x}\right).$$

7p **14** Bereken algebraïsch de waarden van a, b en c. Geef je eindantwoord zo nodig in twee decimalen.

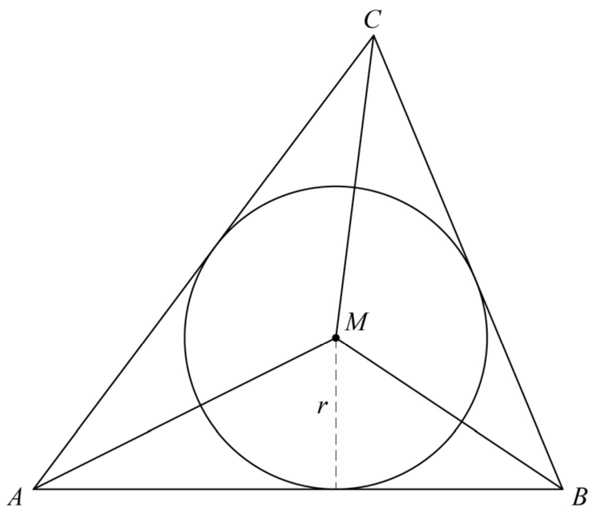
Ingeschreven cirkel

De ingeschreven cirkel van een driehoek ABC is de cirkel die raakt aan alle zijden van de driehoek. Het punt M is het middelpunt van deze cirkel en r is de straal van deze cirkel. Zie figuur 1.

figuur 1



figuur 2



Elke driehoek ABC kan met behulp van punt M in drie aparte driehoeken AMB, BMC en AMC worden verdeeld. Zie figuur 2.

Wanneer we de zijden AB, BC en AC als basis kiezen voor respectievelijk de driehoeken AMB, BMC en AMC, dan is r de bijbehorende hoogte van elk van deze driehoeken. Voor elke driehoek ABC kan de oppervlakte G daarom worden uitgedrukt in de omtrek P van de driehoek en de straal r van de ingeschreven cirkel van de driehoek.

Er geldt: $G = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$

3p **15** Bewijs dit.

We bekijken nu een driehoek ABC met zijden $AB = 14$, $BC = 13$ en $AC = 15$.

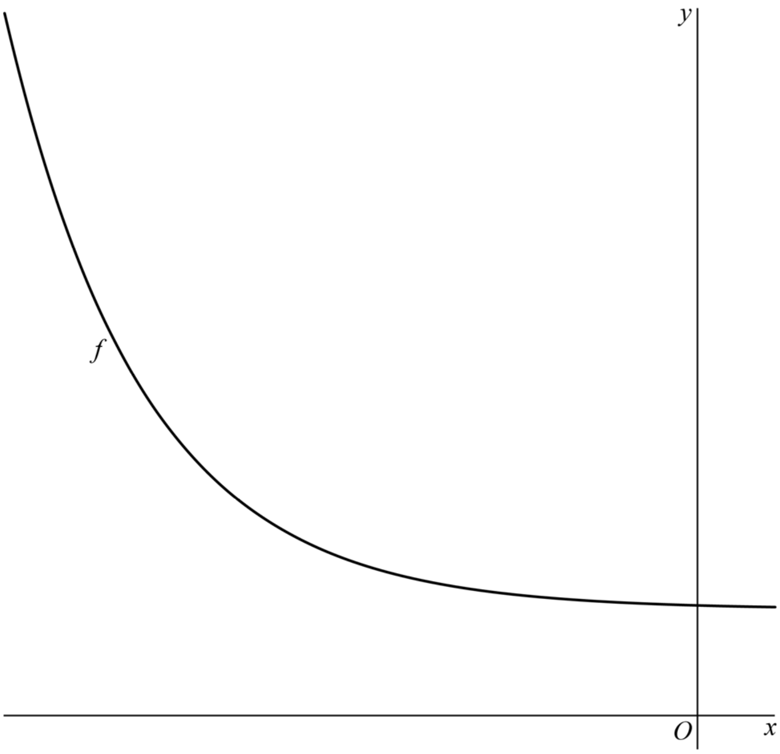
6p **16** Bereken de straal van de ingeschreven cirkel van deze driehoek. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Exponentiële functie

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{9} \cdot \left(3^{-\frac{1}{2}x} + 27\right)$. Zie de figuur.

figuur



Op het domein $[a, -4]$ is het bereik van f gelijk aan $[4, 16]$.

Er geldt, afgerond op twee decimalen: $a \approx -8{,}67$.

4p **17** Bereken a exact.

Een ander functievoorschrift voor f is $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x+4} + 3$.

5p **18** Bewijs dit.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.