# Examen HAVO

# 2017

tijdvak 1
vrijdag 19 mei
13.30 - 16.30 uur

**oud programma** **wiskunde B**

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

## Voornamen

Mensen die een kind krijgen, moeten dit melden bij de Sociale Verzekeringsbank (SVB) om kinderbijslag te ontvangen. De SVB beschikt hierdoor over de voornamen van vrijwel alle kinderen die in een bepaald jaar zijn geboren. In Nederland zijn in 1996 en 1997 in totaal ongeveer 200 000 jongens geboren.

Sommige namen worden heel vaak gegeven terwijl andere namen zelden voorkomen. In alle aanmeldingen bij de SVB over de jaren 1996 en 1997 kwamen 15 788 verschillende voornamen van jongens voor. Het gaat dan alleen om de eerste naam van de jongens en niet om eventuele extra namen.

In de tabel is een overzicht gegeven van het aantal jongens per voornaam ($a$) en het bijbehorende aantal voornamen ($n$) in deze periode.

**tabel**

| Voornamen | Monk, Archimeds, Cassius,… | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | Thomas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aantal jongens per voornaam ($a$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | … | 2346 |
| Aantal voornamen ($n$) | 9726 | 2067 | 855 | 487 | 323 | 226 | 188 | 165 | 125 | 91 | … | 1 |

Thomas is de voornaam die in de jaren 1996 en 1997 het meest voorkwam. Uit de tabel blijkt dat deze naam in totaal aan 2346 jongens werd gegeven. Er zijn ook namen die in deze periode aan slechts één jongen zijn gegeven, bijvoorbeeld Monk, Archimedes en Cassius. In de tabel zie je dat er in deze twee jaren in totaal 9726 namen waren die elk één keer aan een jongen zijn gegeven.

Van alle jongens geboren in 1996 en 1997 zijn er 19 988 die minder dan vijf naamgenoten hebben die ook in deze periode geboren zijn.

3p **1** Leg dit uit met behulp van de tabel.

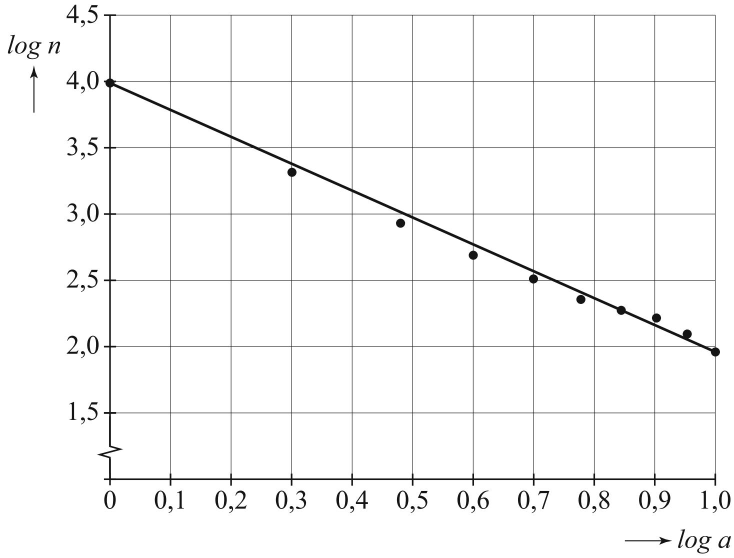
Uit de tabel blijkt dat het verband tussen $a$ en $n$ niet lineair is.

2p **2** Toon met een berekening aan dat er ook **geen** sprake is van een exponentieel verband tussen $a$ en $n$.

In de figuur is $\log n$ uitgezet tegen $\log a$ voor $a = 1$ tot en met $a = 10$. Deze punten liggen bij benadering op de rechte lijn door de punten met $a = 1$ en $a = 10$. Voor de punten op de rechte lijn geldt een lineair verband tussen $\log a$ en $\log n$. Dus $\log n = p \cdot \log a + q$.

Voor de formule die hoort bij deze lijn geldt $p \approx -2$ en $q \approx 4$.

**figuur**




Met behulp van de waarden uit de tabel die horen bij $a = 1$ en $a = 10$ kunnen $p$ en $q$ op algebraïsche wijze berekend worden.

4p 3 Bereken de waarden van $p$ en $q$ op deze manier. Rond je antwoorden af op twee decimalen.

Het punt dat hoort bij $a = 4$ ligt iets onder de lijn. Dit betekent dat het werkelijke aantal voornamen dat 4 keer is gegeven kleiner is dan het aantal dat hiervoor met behulp van de formule $\log n = -2 \cdot \log a + 4$ gevonden wordt.

3p 4 Bereken hoeveel procent kleiner.

Door herschrijven van de formule die hoort bij de grafiek in de figuur blijkt dat het verband tussen $a$ en $n$ kan worden benaderd met de machtsfunctie die gegeven is door:

$$n(a) = 9726 \cdot a^{-2{,}03}$$

In de tabel is te zien dat wanneer $a$ toeneemt, $n$ afnemend daalt. Deze machtsfunctie is hiermee in overeenstemming.

4p 5 Toon dit aan met behulp van de afgeleide van $n(a)$.

## Cartridge verpakken

Voor veel printers zijn cartridges nodig waarin de inkt zit. Op foto 1 staat de kartonnen verpakking van een inktcartridge afgebeeld. Op de foto's 2 en 3 staat dezelfde verpakking, alleen is de bovenste flap er afgeknipt en wordt de verpakking opengevouwen.

**foto 1**

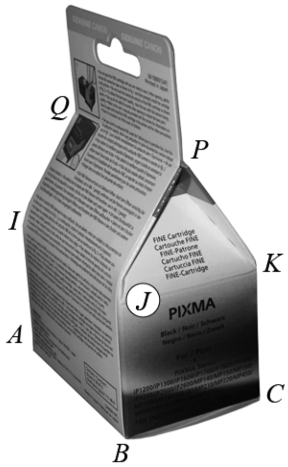



**foto 2**

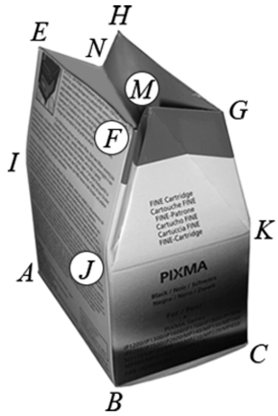
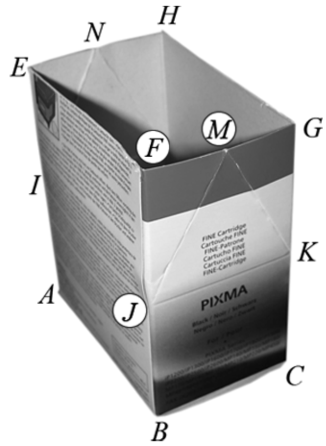


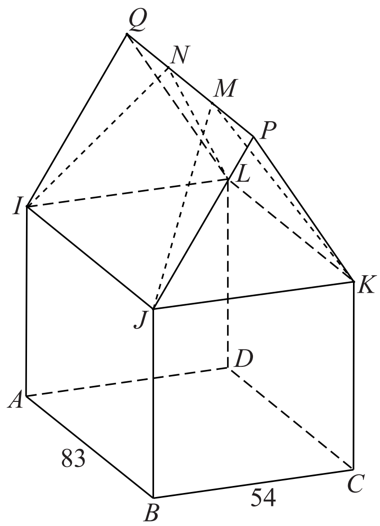

**foto 3**




In opengevouwen toestand heeft de verpakking zonder de bovenste flap de vorm van een balk met lengte 83 mm, breedte 54 mm en hoogte 100 mm.
De punten $I$, $J$, en $K$ zijn de middens van de ribben $AE$, $BF$ en $CG$. De punten $M$ en $N$ zijn de middens van de randen $FG$ en $EH$. Zie foto 3.

In de figuur is een ruimtelijk model getekend van de verpakking in dichtgevouwen toestand zonder de afgeknipte bovenste flap. In deze opgave gebruiken we dit model voor het beantwoorden van vragen over de kartonnen verpakking.

**figuur**




In dichtgevouwen toestand heeft het onderste deel van de verpakking ook de vorm van een balk, nu met hoogte $BJ$. Punt $F$ ligt tegen punt $G$. Dit punt wordt in de dichtgevouwen toestand $P$ genoemd. Aan de achterkant ligt punt $E$ tegen punt $H$. Dit punt wordt $Q$ genoemd. In dichtgevouwen toestand liggen de punten $M$ en $N$ op lijnstuk $PQ$. Zie foto 1 en de figuur.

In dichtgevouwen toestand is de hoogte van de verpakking zonder de bovenste flap afgerond 92 mm.

3p **6** Toon dit aan.

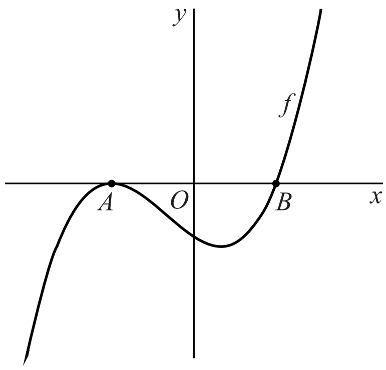
De inhoud van de kartonnen verpakking in dichtgevouwen toestand is gelijk aan de inhoud van een prisma met daaruit weggelaten twee even grote piramides. Eén van die piramides is $M.JKP$.

5p **7** Bereken de inhoud van de kartonnen verpakking in dichtgevouwen toestand. Geef je antwoord in liters in twee decimalen nauwkeurig.

## Gemeenschappelijke punten

De functie $f$ is gegeven door $f(x) = (x^2 - 4)(x + 2)$.
In figuur 1 is de grafiek van $f$ geschetst.

**figuur 1**

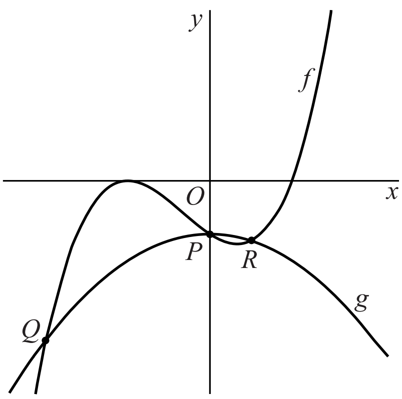



De grafiek van $f$ heeft de punten $A$ en $B$ gemeenschappelijk met de $x$-as.

3p **8** Bereken op algebraïsche wijze de coördinaten van deze punten.

4p **9** Bereken exact de $x$-coördinaat van de top van de grafiek van $f$ die rechts van de $y$-as ligt.

**figuur 2**




Punt $P$ is het snijpunt van de grafiek van $f$ met de $y$-as. Op de grafiek van $f$ ligt het punt $Q$ met $x_Q = -4$.

De functie $g$ is gegeven door $g(x) = ax^2 + c$, met $a$ en $c$ zo dat de grafiek van $g$ door de punten $P$ en $Q$ gaat. Zie figuur 2.

$f(1) = -9$, dus het punt $R(1, -9)$ ligt op de grafiek van $f$.

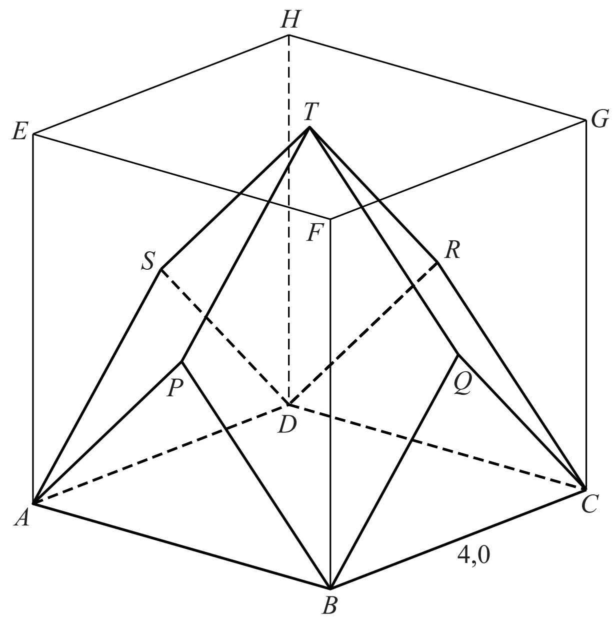
5p **10** Toon op algebraïsche wijze aan dat punt $R$ ook op de grafiek van $g$ ligt.

## Lichaam

Gegeven is kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 4,0 cm. De punten $P$, $Q$, $R$ en $S$ liggen in het midden van de zijvlakken. Het punt $T$ ligt in het midden van het bovenvlak. Het lichaam $L$ heeft als hoekpunten $A$, $B$, $C$, $D$, $P$, $Q$, $R$, $S$ en $T$. Zie de figuur.

5p **11** Teken de uitslag van $L$ op ware grootte. Licht je werkwijze toe.

**figuur**



## Zuurstof in water

Water bevat zuurstof. Het **zuurstofgehalte** van water is de hoeveelheid zuurstof in het water in mg/l.
Het zuurstofgehalte van water heeft een maximum: het **verzadigingsniveau**.
Dit verzadigingsniveau is onder andere afhankelijk van de watertemperatuur.
In de tabel wordt bij een aantal watertemperaturen het verzadigingsniveau van zuurstof in **zuiver** water gegeven.

**tabel**

| temperatuur (°C) | verzadigingsniveau (mg/l) |
|---|---|
| 0 | 14,6 |
| 10 | 11,3 |
| 20 | 9,2 |
| 30 | 7,8 |

Een formule die goed past bij de gegevens in de tabel is van de vorm:

$$V = \frac{a}{1+bT}$$

Hierin is $V$ het verzadigingsniveau in mg/l en $T$ de watertemperatuur in °C.
$a$ en $b$ zijn constanten.

4p **12** Bereken met behulp van gegevens uit de tabel de waarden van $a$ en $b$.

Het zuurstofgehalte van water in de natuur is een belangrijke indicator voor de waterkwaliteit. Wanneer het zuurstofgehalte lager wordt dan 5 mg/l, treedt er vissterfte op. De belangrijkste oorzaak van een te laag zuurstofgehalte is een te hoge watertemperatuur.

Het verband tussen het verzadigingsniveau van zuurstof in zuiver water $V$ en de watertemperatuur $T$ wordt ook gegeven door de formule $V = \frac{498}{34+T}$.

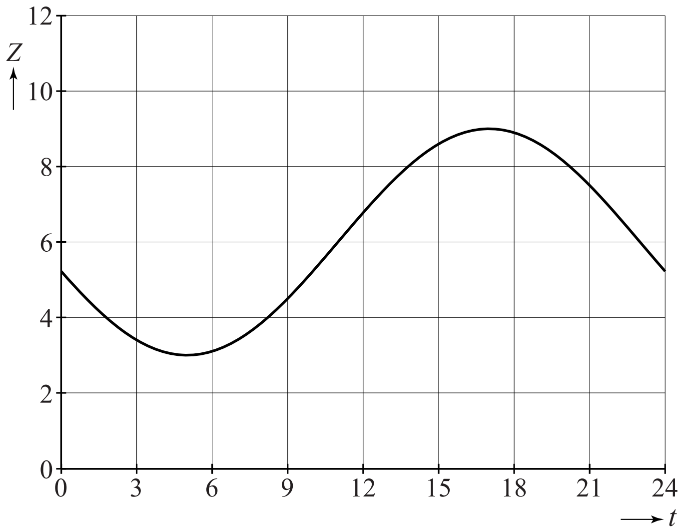
Het zuurstofgehalte van water in de natuur is bij elke temperatuur 40% lager dan het verzadigingsniveau van zuurstof in zuiver water bij dezelfde temperatuur.

4p **13** Bereken met behulp van de laatstgenoemde formule in hele graden Celsius nauwkeurig vanaf welke watertemperatuur er in de natuur vissterfte plaats vindt.

Het zuurstofgehalte van water is niet alleen afhankelijk van de temperatuur maar ook van de hoeveelheid zonlicht. Hoe meer zonlicht er in het water doordringt, hoe meer zuurstof er geproduceerd wordt door de waterplanten.

In de figuur staat de grafiek van het verloop van het zuurstofgehalte van het water in een bepaalde rivier gedurende een onbewolkte dag (24 uur).

**figuur**



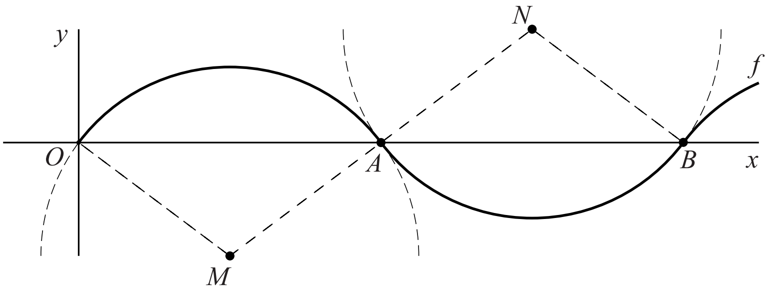

De formule die hoort bij deze grafiek is: $Z = 6 + 3\sin(\frac{1}{12}\pi(t-11))$. Hierbij is $Z$ het zuurstofgehalte in mg/l en $t$ de tijd in uren. Als $t = 0$ is het middernacht.

5p **14** Bereken in hele uren nauwkeurig hoe lang het zuurstofgehalte van de rivier lager was dan 5 mg/l.

## Cirkelbogen

Een manier om golven te beschrijven, is als een aaneenschakeling van even grote cirkelbogen. Deze cirkelbogen zijn delen van cirkels van gelijke grootte die elkaar raken.

**figuur 1**




In figuur 1 vormen de cirkelbogen $OA$ en $AB$ precies één golf. De golf begint in de oorsprong $O$, gaat door het punt $A(8, 0)$ en eindigt in het punt $B(16, 0)$. Vanuit punt $B$ wordt op vergelijkbare wijze de aaneenschakeling van even grote cirkelbogen voortgezet. Zo ontstaat de grafiek van $f$.

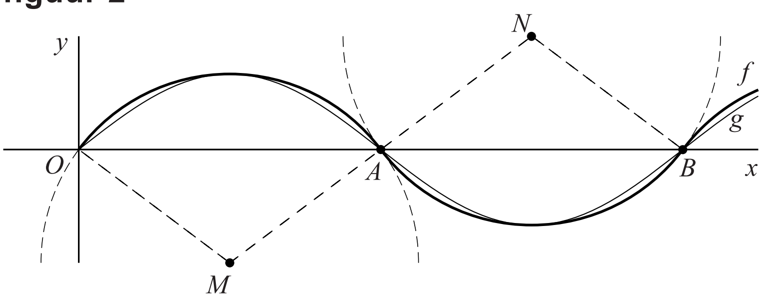
De cirkelboog $OA$ wordt beschreven door de formule
$f(x) = -3 + \sqrt{9 + 8x - x^2}$ met $0 \leq x \leq 8$.

Het punt $P$ met $x$-coördinaat 55 ligt op de grafiek van $f$. Met behulp van de periodiciteit van $f$ kan de $y$-coördinaat van punt $P$ worden berekend.

3p **15** Bereken de $y$-coördinaat van punt $P$.

Een andere manier om golven te beschrijven, is door een sinusoïde te gebruiken. De grafiek van $f$ wordt benaderd door een sinusoïde die door de toppen van deze grafiek en door de snijpunten van de grafiek met de $x$-as gaat. Zie figuur 2.

**figuur 2**




Bij deze sinusoïde past een functievoorschrift van de vorm $g(x) = b\sin(c \cdot x)$.

Er geldt dat $b = 2$ en $c = \frac{1}{8}\pi$.

3p **16** Toon dit aan.

3p **17** Bereken het maximale verschil tussen $f(x)$ en $g(x)$. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

In de gezamenlijke toppen van de grafieken van $f$ en $g$ zijn de hellingen gelijk. In de oorsprong is de helling van de grafiek van $f$ meer dan anderhalf keer zo groot als de helling van de grafiek van $g$.

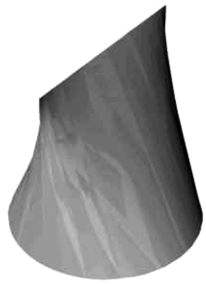
7p **18** Toon dit laatste met behulp van differentiëren aan.

**Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.**

## Wig van Wallis

De wig van Wallis is een bijzonder ruimtelijk lichaam, zie de foto.
In een bepaalde stand geldt: het zijaanzicht is een vierkant, het vooraanzicht is een gelijkbenige driehoek en het bovenaanzicht is cirkelvormig.

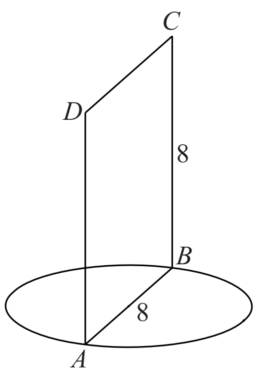
**foto**



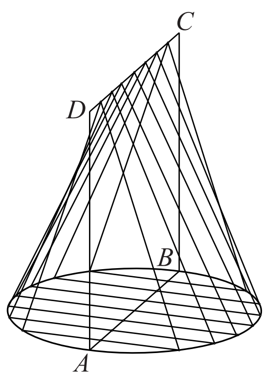
De constructie van een wig van Wallis met hoogte 8 is als volgt:
- Neem als grondvlak een cirkel met straal 4.
- Loodrecht op de cirkel komt een vierkant $ABCD$ van 8 bij 8. De zijde $AB$ van dit vierkant is een middellijn van de cirkel.
- Loodrecht op zowel de cirkel als het vierkant komen allemaal gelijkbenige driehoeken. Deze driehoeken hebben hun top op het lijnstuk $CD$. De overige twee hoekpunten van elk van deze driehoeken liggen op de cirkel in het grondvlak.
- Alle opstaande zijden van deze driehoeken vormen samen met $AD$ en $BC$ de mantel van de wig van Wallis.

In de figuren 1 en 2 wordt de constructie van de wig van Wallis geïllustreerd.

**figuur 1**




**figuur 2**




Niet alle opstaande lijnstukken die de mantel van de wig van Wallis vormen, zijn even lang.

4p **19** Bereken exact de verhouding tussen de lengte van een kortste lijnstuk en de lengte van een langste lijnstuk.

De volgende vraag gaat over een wig van Wallis waarvan de hoogte 8,0 cm is.

Punt $Q$ ligt op lijnstuk $AB$ op een afstand van 1,0 cm van punt $A$. De wig van Wallis wordt verticaal doorsneden loodrecht op lijnstuk $AB$ en door punt $Q$.

4p **20** Teken de doorsnede op ware grootte. Licht je werkwijze toe.