

Examen HAVO

2017

tijdvak 1
vrijdag 19 mei
13.30 - 16.30 uur

oud programma

wiskunde A

Dit examen bestaat uit 20 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.

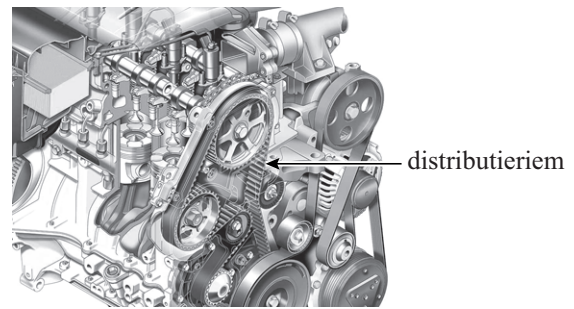
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Distributieriem

Een distributieriem is een geribbelde riem die in een moderne verbrandingsmotor van een auto zit. Zo'n riem heeft ten opzichte van een ketting voordelen: hij maakt minder lawaai en er is geen smering nodig. Een riem heeft als nadeel dat hij slijt en op een gegeven moment defect raakt. Een defecte riem veroorzaakt veel schade aan de motor. Het is dus belangrijk om de distributieriem te vervangen voordat die defect raakt. Dit noemt men **preventief** vervangen.



De levensduur van een distributieriem is het aantal kilometers dat ermee gereden wordt tot de riem defect raakt. We gaan ervan uit dat de levensduur van distributieriemen normaal verdeeld is met een gemiddelde van 91 000 km en een standaardafwijking van 10 000 km.

Automonteurs adviseren om de riem bij 60 000 km preventief te laten vervangen.

- 3p 1 Bereken de kans dat een distributieriem al defect is vóór de preventieve vervanging bij 60 000 km. Rond je antwoord af op vijf decimalen.

Omdat deze kans zo klein is, wil een autobezitter de riem niet al bij 60 000 km vervangen, maar pas na veel meer kilometers. Hij wil echter niet dat de kans op een defecte riem groter is dan 0,10.

- 3p 2 Bereken het maximale aantal kilometers waarbij hij dan de riem preventief kan laten vervangen.

Ineke heeft 60 000 km gereden met haar distributieriem. Het komende jaar verwacht zij 10 000 km te rijden. Zij staat voor de afweging: laat ik nu de riem preventief vervangen of probeer ik het nog een jaar?

Ineke vergelijkt de kosten. Een nieuwe distributieriem kost € 505. Als ze de distributieriem nu preventief laat vervangen, is ze dus € 505 kwijt, maar dan kan ze ervan uitgaan dat de nieuwe riem het komende jaar geen problemen oplevert.

Als ze de distributieriem niet laat vervangen, zijn er twee mogelijkheden. De riem die ze heeft, raakt niet defect en dan heeft ze geen kosten. Maar als de riem in het komende jaar defect raakt, kosten een nieuwe riem en het repareren van de schade aan de motor haar € 2200. Ineke vraagt zich af of ze dat risico wil lopen.

In de garage gebruikt men een tabel waarin je kunt aflezen hoe groot de kans p is dat de distributieriem in het komende jaar defect raakt. Zie tabel 1. Je ziet bijvoorbeeld dat iemand die 75 000 km gereden heeft met een distributieriem en daarmee het komende jaar 14 000 km zal gaan rijden, een kans van 0,39 heeft op een defecte distributieriem.

tabel 1

		verwachte aantal te rijden kilometers (x 1000)											
		8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
aantal gereden kilometers met distributieriem (x 1000)	60	0,01	0,02	0,03	0,04	0,07	0,10	0,13	0,18	0,24	0,31	0,38	0,46
	65	0,03	0,05	0,08	0,11	0,15	0,21	0,27	0,34	0,42	0,50	0,58	0,65
	70	0,08	0,12	0,17	0,23	0,30	0,37	0,45	0,53	0,61	0,69	0,75	0,81
	75	0,17	0,23	0,31	0,39	0,47	0,55	0,64	0,71	0,78	0,83	0,88	0,91
	80	0,29	0,38	0,47	0,56	0,64	0,72	0,79	0,84	0,89	0,92	0,95	0,97
	85	0,42	0,53	0,62	0,71	0,78	0,84	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99

Ineke maakt een kansverdeling van de kosten in het geval ze de riem niet laat vervangen. Zie tabel 2. Hierin is p de kans dat de riem in het komende jaar defect raakt.

tabel 2

Kosten (in euro) wanneer de riem niet vervangen wordt	0	2200
Kans	$1 - p$	p

Ineke, die al 60 000 km heeft gereden met haar distributieriem en in het komende jaar verwacht 10 000 km te rijden, laat de distributieriem vervangen als de kosten van preventieve vervanging lager zijn dan de verwachtingswaarde van de kosten wanneer ze de riem niet laat vervangen.

- 4p **3** Zal Ineke haar distributieriem preventief laten vervangen? Licht je antwoord toe met een berekening.

Ineke heeft besloten om haar distributieriem niet preventief te laten vervangen en ze rijdt het daaropvolgende jaar 10 000 kilometer zonder problemen. Maar na dat jaar staat ze opnieuw voor de beslissing: preventief laten vervangen of niet?

Ook nu wil ze haar distributieriem preventief laten vervangen als de kosten hiervan lager zijn dan de verwachtingswaarde van de kosten wanneer ze de riem niet preventief laat vervangen. Het aantal te rijden kilometers in het daaropvolgende jaar staat voor haar echter nog niet vast.

Bij een bepaald aantal te rijden kilometers zijn de kosten van preventieve vervanging even hoog als de verwachtingswaarde van de kosten wanneer ze haar distributieriem niet preventief laat vervangen.

- 5p **4** Onderzoek bij welk aantal kilometers dit het geval is.

Kleurentorentjes

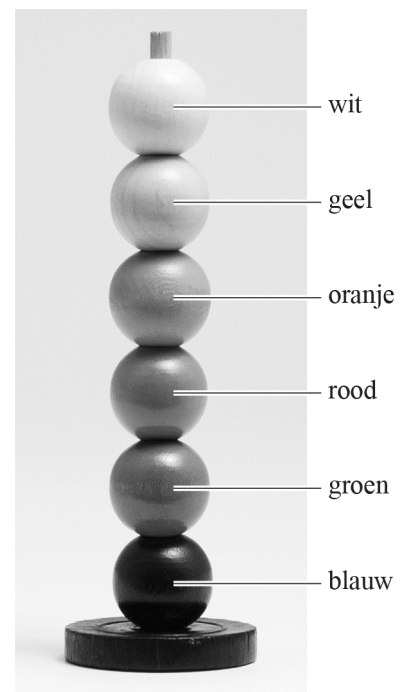
Kleurentorentjes is een spel voor kleine kinderen. Bij dit spel horen vier setjes van zes kralen in zes verschillende kleuren, namelijk blauw, groen, rood, oranje, geel en wit. Ook hoort bij dit spel een dobbelsteen met op elk zijvlak een van de genoemde kleuren. Elke speler krijgt een setje kralen en een staafje. Zie figuur 1.

figuur 1



In de spelregels staat dat elke speler met behulp van de dobbelsteen zijn torentje moet opbouwen in de volgorde die in figuur 2 is aangegeven. De spelers gooien om en om met de dobbelsteen. Als een speler de kleur gooit die volgens figuur 2 aan de beurt is, dan mag hij de kraal met die kleur op zijn staafje plaatsen, waarna zijn beurt voorbij is. Als hij een andere kleur gooit, dan mag hij geen kraal plaatsen en is zijn beurt meteen voorbij. Wie het eerst zijn torentje heeft opgebouwd, is de winnaar.

figuur 2



- 3p 5 Bereken de kans dat Chris, nadat hij drie keer aan de beurt is geweest, nog steeds geen blauw heeft gegooid.

Chris gaat het spel met zijn oma spelen. Hij weet dat hij eerst blauw moet gooien, omdat dat de onderste kleur is in figuur 2.

- 4p 6 Bereken de kans dat de groene kraal op het staafje van oma zit, nadat zij drie keer aan de beurt is geweest.
- Als oma drie keer aan de beurt is geweest, kan ze óf geen kralen op haar staafje hebben óf één (een blauwe) óf twee (een blauwe en een groene) óf drie (een blauwe, een groene en een rode).

Chris en zijn oma vinden de spelregels maar streng. Ze besluiten om de spelregels aan te passen en spreken af dat de volgorde van de kleuren niet uitmaakt. Er moet wel een torentje van zes kralen gemaakt worden dat alle zes kleuren bevat en een kraal mag pas geplaatst worden als de betreffende kleur met de dobbelsteen is gegooid.

Ze beginnen ieder weer met een leeg staafje.

- 3p 7 Bereken de kans dat Chris, nadat hij drie keer aan de beurt is geweest, drie kralen op zijn staafje heeft.

Het spel gaat door, met de gewijzigde spelregels. Op een bepaald moment heeft oma 1 kraal op haar staafje. Chris is al een stuk verder, want hij mist alleen nog de kleuren geel en blauw op zijn staafje. Je kunt de kans berekenen dat hij nog precies vier beurten nodig heeft om zijn kleurentorentje compleet te maken.

Een van de mogelijkheden is dat hij eerst tweemaal een kleur gooit die hij al op zijn staafje heeft. Daarna gooit hij een van de kleuren geel of blauw en ten slotte gooit hij de nog ontbrekende kleur. Hij mag dus eerst tweemaal niet en vervolgens tweemaal wel een kraal plaatsen. Dit kun je noteren als N-N-W-W.

Zo zijn er meer manieren om na precies vier beurten klaar te zijn.

- 5p 8 Bereken de kans dat Chris nog precies vier beurten nodig heeft om zijn kleurentorentje compleet te maken.

Smartphones

Er zijn verschillende manieren waarop fabrikanten van smartphones de verkoopcijfers van hun producten presenteren. Smartphonefabrikant Belsonics, die de Cute-serie op de markt brengt, hield bij hoeveel dagen het duurde voordat een bepaald aantal smartphones verkocht was. In de tabel zie je een deel van deze gegevens.

tabel

type smartphone	eerste miljoen verkocht in:	eerste drie miljoen verkocht in:	eerste tien miljoen verkocht in:
Cute 1	70 dagen	85 dagen	138 dagen
Cute 2	30 dagen	56 dagen	
Cute 3	12 dagen	40 dagen	71 dagen

De verkoop van de Cute 2 is vanaf de eerste miljoen exemplaren tot en met de eerste tien miljoen exemplaren lineair verlopen. Met behulp van lineair extrapoleren kun je berekenen in hoeveel dagen de eerste tien miljoen exemplaren van de Cute 2 verkocht zijn.

- 4p **9** Bereken hoeveel dagen minder het duurde om tien miljoen exemplaren van de Cute 1 te verkopen dan tien miljoen van de Cute 2.

In de tabel kun je zien dat de verkoop van de Cute 3 veel sneller ging dan de verkoop van de andere twee types. Bij de Cute 3 bleek het aantal verkochte exemplaren vanaf de eerste miljoen niet lineair maar exponentieel te stijgen.

- 4p **10** Bereken met hoeveel procent het totale aantal verkochte exemplaren van de Cute 3 dagelijks toenam.

Steeds meer mensen kopen een smartphone. Er vinden in Nederland onderzoeken plaats waarin onderzocht wordt hoeveel mensen een smartphone gebruiken. Hierbij kijkt men alleen naar de doelgroep: alle Nederlanders van 12 tot 80 jaar. De **penetratiegraad** van de smartphone is het percentage van de doelgroep dat een smartphone gebruikt.

De penetratiegraad van de smartphone in Nederland kan berekend worden met de formule

$$P = \frac{100}{1 + 173 \cdot 0,494^t}$$

Hierin is P de penetratiegraad in procenten en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2005.

- 4p **11** Bereken in welk jaar de penetratiegraad het meest toeneemt.

Op 1 januari 2014 waren er 10 miljoen smartphonegebruikers in Nederland.

4p **12** Bereken hoe groot de doelgroep op 1 januari 2014 was.

Op den duur gebruikt vrijwel iedereen in de doelgroep een smartphone.

3p **13** Laat dit zien met behulp van de formule.

Giflozing

In een rivier is per ongeluk een giftige stof geloosd. Omdat men weet om welke stof het gaat en om welke hoeveelheid, kan men een formule opstellen die bij benadering de concentratie van het gif in de rivier beschrijft. Deze formule is opgebouwd uit twee delen:

$$C = \frac{1000}{\sqrt{t}} \cdot 0,37^p \quad \text{met} \quad p = \frac{(x-t)^2}{t}$$

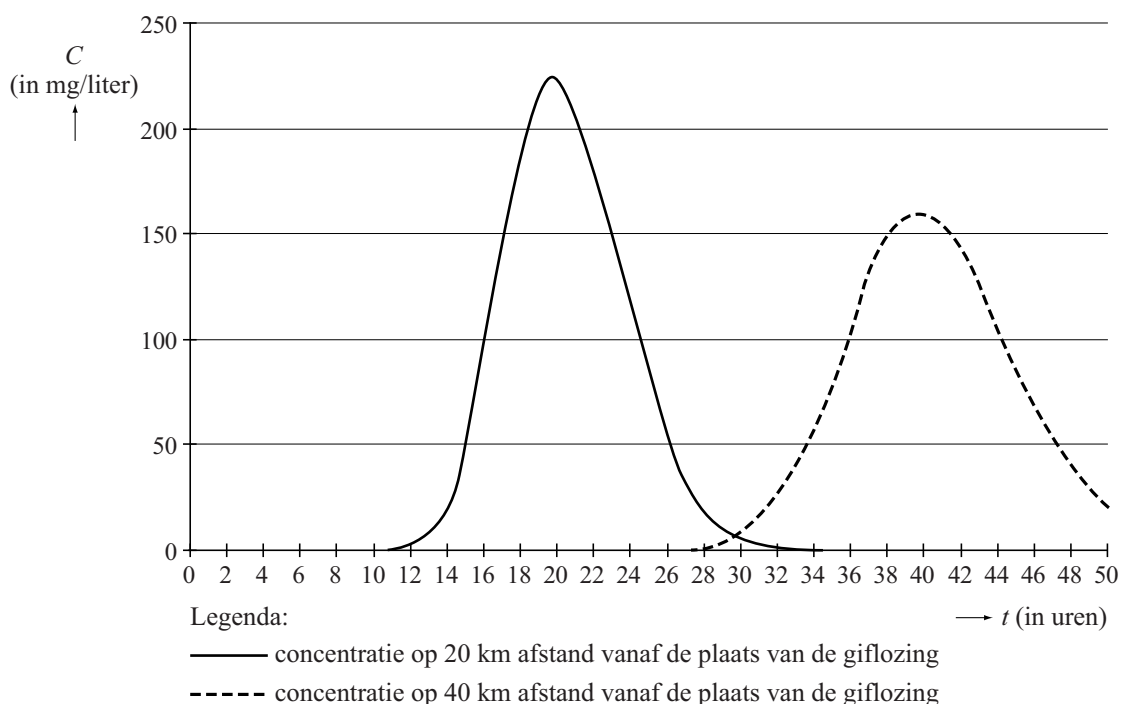
Hierin is C de gifconcentratie in mg per liter, x het aantal km stroomafwaarts langs de rivier vanaf de plaats van de giflozing en t de tijd in uren vanaf het moment van de giflozing.

De giflozing vond plaats om 10:45 uur.

- 3p 14 Bereken de gifconcentratie in de rivier om 14:30 uur op een afstand van 6 km stroomafwaarts.

In onderstaande figuur staat voor twee plaatsen langs de rivier, één op 20 km afstand en één op 40 km, hoe de concentratie in de loop van de tijd verandert. Op 20 km afstand is de concentratie na 16 uur ongeveer 100 mg per liter.

figuur



Je kunt in de figuur zien dat de maximale concentratie op 20 km afstand ongeveer bereikt wordt na 20 uur, en op 40 km afstand na 40 uur, dus als $t = x$. We gaan in de rest van de opgave ervan uit dat voor iedere afstand x geldt dat de maximale concentratie wordt bereikt op tijdstip $t = x$.

Met het bovenstaande gegeven is een formule voor de maximale concentratie C_{\max} (in mg per liter) af te leiden uit de oorspronkelijke formule voor de concentratie C . Voor de maximale concentratie ontstaat de formule

$$C_{\max} = \frac{1000}{\sqrt{t}}$$

waarin t de tijd in uren vanaf het moment van de giflozing is.

- 3p 15 Laat zien hoe deze formule afgeleid kan worden uit de andere gegevens.

Met behulp van deze formule kun je berekenen na hoeveel tijd de maximale concentratie C_{\max} gelijk is aan 80 mg per liter.

- 4p 16 Bereken deze tijdsduur in dagen. Geef je antwoord in één decimaal.

De oorspronkelijke formule voor de gifconcentratie C kan worden geschreven als:

$$C = \frac{1000}{\sqrt{t}} \cdot 0,37^{\frac{(x-t)^2}{t}}$$

Hierin is C de gifconcentratie in mg per liter, x het aantal km stroomafwaarts langs de rivier vanaf de plaats van de giflozing en t de tijd in uren vanaf het moment van de giflozing.

Op 25 km afstand van de giflozing ligt een rivierstrandje. Bij het strandje wordt voortdurend de gifconcentratie in de gaten gehouden. Er geldt hier een zwemverbod wanneer de concentratie C hoger is dan 65 mg per liter.

- 5p 17 Bereken hoelang het zwemverbod bij het strandje duurt.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Smurfen

Nederland was begin 2008 een aantal weken in de ban van smurfen. Bij een grote supermarkt met veel vestigingen liep een actie waarbij bij elke € 15,00 aan boodschappen een smurf werd weggegeven.

Er werden enorme hoeveelheden smurfen geproduceerd. Er waren 15 verschillende soorten smurfen en van elk soort werden er evenveel gemaakt. Daarna werden ze goed door elkaar gemengd en aselekt aan de kassa uitgedeeld.

De supermarkt wilde met deze actie meer omzet maken. En dat gebeurde. In februari 2008 bedroeg de totale omzet van de supermarkt in Nederland 559 miljoen euro, dat was 7,9% meer dan in februari 2007. Ook werd er per klantenbezoek in februari 2008 meer geld uitgegeven dan in februari 2007: het gemiddelde bedrag op de kassabon steeg van € 20,25 naar € 21,55.

- 6p **18** Bereken hoeveel klantenbezoeken de supermarkt in februari 2008 méér heeft gehad dan in februari 2007.

Leonie heeft 6 smurfen gekregen: 2 brilsmurfen en 4 andere, onderling verschillende, soorten smurfen. Ze wil ze op een rijtje op de vensterbank zetten. Rijtjes waarin alleen de brilsmurfen worden verwisseld, zijn hetzelfde.

Leonie zegt dat ze 365 dagen lang elke dag een ander rijtje met haar 6 smurfen kan maken.

- 4p **19** Onderzoek met een berekening of Leonie gelijk heeft.

Peter Paul heeft zijn verzameling bijna compleet. Hij mist alleen Muzieksmurf nog. Hij gaat daarom bij deze supermarkt boodschappen doen. Hij besteedt € 63,50.

- 5p **20** Bereken de kans dat hij nu zijn verzameling compleet heeft.